Solitary and Cnoidal Waves in the Equation of a Convecting Fluid

Solitäre und knoidale Wellen in der Gleichung des Konvektionsfluids

Magdalina Uzunova

Universität für Architektur, Bauwesen und Geodäsie
Sofia, Bulgarien, E-Mail: magi.uzunova@abv.bg

Abstract — In the present work several different models of exact solitary families of traveling waves of the evolutionary equation for a convective fluid are obtained. This is achieved on the basis of the generalized mapping and singular deformations method. Families of the difficult to find rational and cnoidal waves were also obtained in the general case of the studied equation.

Zusammenfassung — Im präsentierten Beitrag sind verschiedene Modelle von exakten solitären Scharen von „laufenden" Wellen für die Evolutionsgleichung des Konvektionsfluids erhalten. Die Ergebnisse werden auf der Basis der verallgemeinerten Methode der Abbildung und der singulären Verformungen erreicht. Im allgemeinen Fall der erforschten Gleichung sind auch schwer auffindbare Scharen von rationalen und knoidalen Wellen erhalten.

I. Einleitung

Die Evolutionsgleichung des Konvektionsfluids

$$\begin{aligned} u_t + \alpha_0 u u_x + \alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 u_{xxx} + \\ + \alpha_3 u_{xxxx} + \alpha_4 (u u_x)_x = 0, u = u(t,x) \end{aligned} \tag{1}$$

eingeführt von Aspe und Depassier [1], beschreibt die Dynamik der langen Wellen in einem Konvektionsfluid auf einer schiefen Ebene, der Driftwellen in Plasma oder der Konvektionsprozesse in Fluiden mit freier Oberfläche. Diese Gleichung enthält in sich selbst verschiedene Modellgleichungen in Abhängigkeit von den Parametern $\alpha_i, i = 0,1,2,3,4$. Für $\alpha_4 = 0$ stimmt die Gleichung (1) mit der Evolutionsgleichung von Kuramoto-Sivashinski [2], bekannt als verallgemeinerte Evolutionsgleichung der Wellendynamik, überein. Für $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ergibt sich die klassische Korteweg-de Vries-Gleichung [3]. Die letzte Gleichung ist von mehreren Autoren in den 60-er Jahren des vorigen Jahrhunderts erforscht. Die Gleichung (1) beschreibt die Verbreitung von unidirektionalen langen Wellen. Sie hat eine komplizierte mathematische Struktur. Die Gleichung ist von vierter Ordnung mit zweitem Singularitätsgrad. Sie hat zwei nichtlineare Glieder und ist nicht integrierbar. Durch Anwendung der direkten Version der Methode der Abbildung haben zuerst Lou, Huang, Ruan [4] eine exakte solitäre Wellenlösung von der Art „laufender" Stoßwelle erhalten. Später hat Porubov [5] durch passende Phasenveränderungen einer elliptischen Lösung der Gleichung (1), dargestellt mit Hilfe der Basisfunktion von Weierstraß [6], [7], eine exakte solitäre und eine knoidale Lösung erhalten. Diese Lösungen gelten nur unter den Bedingungen $\alpha_2\alpha_4 = \alpha_0\alpha_3$ oder $\alpha_2\alpha_4 = 6\alpha_0\alpha_3$. Das heißt, dass diese Lösungen bedingt sind.

In dieser Forschung wird ein breiteres Spektrum von solitären, rationalen und knoidalen Lösungen der Gleichung (1) dargestellt, erhalten mit Hilfe einer Verallgemeinerung der Methode der Abbildung und der singulären Verformungen (Methode von Weiss-Tabor-Carnevale [8]). Diese Methode hat ermöglicht, nicht nur exakte analytische Lösungen zu lokalisieren, sondern auch neue Zweiparameterschare von bedingungslosen Lösungen der betrachteten Evolutionsgleichung zu entwickeln. Zu den exakten lokalisierten Lösungen ohne zusätzliche Bedingungen zwischen den Koeffizienten zählt auch die durch eine räumliche Version der bilinearen Transformationsmethode von Hirota [10]-Matsuno [11] erhaltene von Kamenov [9] periodische Lösung. Sie gilt nicht nur in Gebieten der schwachen, sondern auch in Gebieten der starken Nicht-linearität. In beiden Fällen ist das Prinzip der nichtlinearen Überlagerung von Toda [12] gültig.

II. Solitäre „laufende" Wellen

Die Koeffizienten $\alpha_i, i = 0,1,2,3,4$ sind mit den dynamischen Eigenschaften des Konvektionsfluids verbunden.

$$\left| \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{3(10 + Pr.Ga)}{2Pr.Ga}, \alpha_4 = \frac{\varepsilon 8}{\sqrt{Ga}} \\ \alpha_1 &= \frac{\varepsilon R_0 Pr}{15}, \alpha_2 = Pr\sqrt{Ga}\left(\frac{1}{6} + \frac{17}{21}Pr\right) \\ \alpha_3 &= \frac{Pr}{2079}(682(Pr)^2 Ga + 717) \end{aligned} \right.$$

In diesen Formeln ist Pr die Prandtl-Zahl. Weiter ist Ga die Galilei-Zahl. ε ist ein kleiner Parameter $(0 < \varepsilon \ll 1)$, so dass die Rayleigh-Zahl (Ra) mit $Ra = Pr.Gr$ den kritischen Wert $\varepsilon^2 R_0$ übersteigt. R_0 ist für das Fluid ein kritischer Wert der Rayleigh-Zahl. Gr ist die Grashof-Zahl. Es wird eine nichttriviale lokalisierte glatte Lösung der Gestalt „laufender" Welle der Gleichung (1)

$$u(t,x) = \zeta(\xi) \tag{2}$$

mit $\xi = k(x + \omega t)$ im Gebiet $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2, 0 < t < \infty, -\infty < x < \infty\}$ gesucht. $\zeta(\xi)$ ist eine reelle Funktion von der Klasse $C^4(\Omega)$. Zum Vermeiden der Nulllösung sind die unbekannten reellen Parameter ohne Einschränkung der Gesamtheit als $k > 0, \omega \neq 0$ vorausgesetzt. Nach Einsetzen von (2) in (1) und einmaligem Integrieren nach der Phasenveränderlichen ξ ergibt sich folgende nichtlineare Differentialgleichung

$$\omega\zeta + \frac{\alpha_0\zeta^2}{2} + \alpha_1 k\zeta' + \alpha_2 k^2\zeta'' + \alpha_3 k^3\zeta''' + \\ + \alpha_4 k\zeta\zeta' = E \tag{3}$$

Die kumulative Integrationskonstante E kann im Allgemeinen von t abhängen.

Die Methode der Abbildung und der singulären Verformungen beruht auf folgender Annahme. Ein Verhältnis $\zeta = L(\varphi)$ bildet die Lösung der Gleichung $\mu(\varphi) = 0$ auf die Anfangsgleichung $F(\zeta) = 0$ ab. Die Gleichung (3) hat den Singularitätsgrad 2. Deshalb wird angenommen, dass das Verhältnis

$$\zeta = A\varphi^2 + B\varphi + C \tag{4}$$

mit $\varphi = \varphi(\xi)$ eine beliebige nichttriviale Lösung der Riccati-Differentialgleichung

$$\varphi' = c_0\varphi^2 + c_1\varphi + c_2 \tag{5}$$

auf eine lokalisierte Lösung der Anfangsgleichung (3) abbildet. In (4) und (5) sind A, B, C, c_0, c_1, c_2 unbekannte Parameter. Zum Ausschließen der trivialen Lösung wird $A \neq 0, c_0 \neq 0$ vorausgesetzt. Nach Einsetzen von (4) und (5) in (3) ergibt sich das folgende nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{gathered}
Ac_0 k(\alpha_4 A + 12\alpha_3 k^2 c_0^2) = 0 \\
\frac{1}{2}\alpha_0 A^2 + 6\alpha_2 A k^2 c_0^2 + 6\alpha_3 k^3(9Ac_0^2 c_1 + Bc_0^3) + \\
+\alpha_4 kA(2Ac_1 + 3Bc_0) = 0 \\
\alpha_0 AB + 2\alpha_1 kAc_0 + 2\alpha_2 k^2 c_0(5Ac_1 + Bc_0) + \\
+2\alpha_3 k^3 c_0(19Ac_1^2 + 6Bc_0c_1 + 20Ac_0c_2) + \\
+2\alpha_4 k(3ABc_1 + 2ACc_0 + B^2c_0 + 2A^2c_2) = 0 \\
\omega A + \frac{1}{2}\alpha_0(B^2 + 2AC) + \alpha_1 k(2Ac_1 + Bc_0) + \\
+\alpha_2 k^2(4Ac_1^2 + 3Bc_0c_1 + 8Ac_0c_2) + \\
+\alpha_3 k^3\big(c_1^2(8Ac_1 + 7Bc_0) + c_0c_2(8Bc_0 + 52Ac_1)\big) + \\
+\alpha_4 k\big(A(2Cc_1 + 3Bc_2) + B(Bc_1 + Cc_0)\big) = 0 \\
\omega B + \alpha_0 BC + \alpha_1 k(2Ac_2 + Bc_1) + \\
+\alpha_2 k^2(c_1(6Ac_2 + Bc_1) + 2Bc_0c_1) + \\
+\alpha_3 k^3\big(Bc_1^3 + c_2(14Ac_1^2 + 16Ac_0c_2 + 8Bc_0c_1)\big) + \\
+\alpha_4 k\big(BCc_1 + c_2(2AC + B^2)\big) = 0 \\
E = \omega C + \frac{1}{2}\alpha_0 C^2 + \alpha_1 kBc_2 + \alpha_2 k^2 c_2(2Ac_2 + Bc_1) + \\
+\alpha_3 k^3 c_2\big(Bc_1^2 + 2c_2(3Ac_1 + Bc_0)\big) + \alpha_4 kBCc_2
\end{gathered} \tag{6}$$

Von der physikalischen Hinsicht gibt es folgende interessante Lösung:

$$\begin{gathered}
A = -12\frac{\alpha_3}{\alpha_4}k^2c_0^2; B = 0 \\
C = \frac{(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_0\alpha_3)(4\alpha_2\alpha_4 + 9\alpha_0\alpha_3) - 15\alpha_1\alpha_3\alpha_4}{25\alpha_3\alpha_4^2} \\
c_0 \in \mathbb{R}\ ist\ freier\ Parameter, c_1 = \frac{\alpha_0\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4}{5\alpha_3\alpha_4 k} \\
\omega = \frac{1}{5\alpha_3}(2\alpha_2\alpha_4 - 7\alpha_0\alpha_3)C - \\
-\frac{1}{5\alpha_3}(5\alpha_3 k^2c_1^2 - \alpha_2 kc_1 - \alpha_1)(13\alpha_0\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_4) - \\
-\frac{2(\alpha_0\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)}{25\alpha_3^2\alpha_4^2}\big(5\alpha_1 + 2\alpha_2(\alpha_0\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)\big) \\
c_2 = \frac{5\alpha_3 k^2c_1^2 - \alpha_2 kc_1 - \alpha_1}{20k^2c_0\alpha_3} \\
E = \omega C + \frac{1}{2}\alpha_0 C^2 - \\
-\frac{3}{50\alpha_4}(\alpha_2 + 3\alpha_3 kc_1)(5\alpha_3 k^2c_1^2 - \alpha_2 kc_1 - \alpha_1)^2 \\
k > 0\ ist\ freier\ Parameter
\end{gathered} \tag{7}$$

Die erhaltene Lösung (7) ermöglicht die Bestimmung eines breiteren Spektrums von exakten lokalisierten Lösungen der Gleichung (1) unter der Annahme, dass die Koeffizienten $\alpha_i, i = 0,1,2,3,4$ positiv sind. Dann gibt es folgende Fälle für die Lösungen von (1):

Wenn $c_1^2 < 4c_0c_2$, d.h. $0 < k < \frac{5\alpha_1\alpha_3\alpha_4}{\alpha_2(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_0\alpha_3)}$, dann gilt

$$\begin{gathered}
u(t,x) = 3\frac{\alpha_3}{\alpha_4}k^2(c_1^2 - 4c_0c_2)tan^2\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{4c_0c_2 - c_1^2}\right) + \\
+6k^2c_1^2\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\sqrt{4c_0c_2 - c_1^2}\,tan\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{4c_0c_2 - c_1^2}\right) + \\
+C - 3k^2c_1^2\frac{\alpha_3}{\alpha_4}
\end{gathered} \tag{8}$$

Wenn $c_1^2 > 4c_0c_2$ und

$$-\frac{1}{2c_0}\left(-c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}\right) < \varphi < \frac{1}{2c_0}\left(-c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}\right)$$

d.h. $k > max\left(0, \frac{5\alpha_1\alpha_3\alpha_4}{\alpha_2(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_0\alpha_3)}\right)$, dann gilt

$$\begin{gathered}
u(t,x) = 3\frac{\alpha_3}{\alpha_4}k^2(4c_0c_2 - c_1^2)tanh^2\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}\right) - \\
-6k^2c_1^2\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}\,tanh\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}\right) + \\
+C - 3k^2c_1^2\frac{\alpha_3}{\alpha_4}
\end{gathered} \tag{9}$$

Wenn $c_1^2 > 4c_0c_2$ und

$$\varphi \in \left(-\infty; -\frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}}{2c_0}\right) \cup \left(\frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}}{2c_0}; +\infty\right)$$

d.h. $k > max\left(0, \frac{5\alpha_1\alpha_3\alpha_4}{\alpha_2(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_0\alpha_3)}\right)$, dann gilt

$$\begin{gathered}
u(t,x) = 3\frac{\alpha_3}{\alpha_4}k^2(4c_0c_2 - c_1^2)cotanh^2\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}\right) - \\
-6k^2c_1^2\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}\,cotanh\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}\right) + \\
+C - 3k^2c_1^2\frac{\alpha_3}{\alpha_4}
\end{gathered} \tag{10}$$

Wenn $c_1^2 = 4c_0c_2$, d.h. $k = \frac{5\alpha_1\alpha_3\alpha_4}{\alpha_2(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_0\alpha_3)}$, dann gilt

$$u(t,x) = \frac{\alpha_2\alpha_4 - \alpha_0\alpha_3}{10\alpha_3\alpha_4 kc_0} - \frac{1}{c_0\xi} \tag{11}$$

Alle Parameter $(c_0, c_1, c_2, k, \omega, C)$ in den Formeln (8), (9), (10), (11) sind in (7) bestimmt. Die Lösungen (8), (9), (10) sind solitäre Stoßwellen, die Lösung (11) ist rational. Alle solitären Lösungen beschreiben Zweiparameterschare von den entsprechenden „laufenden“ Wellen mit freien Parametern k $(k > 0)$und c_0 $(c_0 \neq 0)$.Sie enthalten zwei gleichartige Impulse mit den gleichen Phasen und mit verschiedenen Amplituden. Ihre räumlichen Abweichungen sind gleich, obwohl die Wellen unter verschiedenen Umständen entstehen. Wegen der Gleichheit

$$C - 3k^2c_1^2\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = \frac{3(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_0\alpha_3)^2}{25\alpha_3\alpha_4^3}$$

hängen die Erhöhungen von den freien Parametern nicht ab. Die solitären Stoßwellen (9) und (10) sind alternativ, d.h. es wird nur eine von denen für alle zulässigen Werte der Parameter erzeugt. Die Wellen der Schar (8) haben die steilste Front. Sie entstehen nur im Fall $\alpha_2\alpha_4 > \alpha_0\alpha_3$. Die aus kurzlebenden und sehr instabilen Wellen bestehende rationale Schar (11) hängt nur von einem Parameter ab. Diese Wellen bilden sich nur für einen Wert der Wellenzahl k und unter der Bedingung $\alpha_2\alpha_4 > \alpha_0\alpha_3$. Ihre scharfen Gipfel befinden sich in den Polstellen, d.h. $\xi = x + \omega t = 0$,

$0 < t < \infty, -\infty < x < \infty$. Das passiert nur für eine negative Frequenz ω, definiert durch (7), d.h. nur bei nach rechts „laufenden" Wellen.

III. Knoidale Wellen

Die knoidalen Lösungen sind besondere Lösungen der Evolutionsgleichungen, die durch die zweite elliptische Funktion von Jakobi [7] dargestellt werden. Sie ist $cn(\theta, m)$ mit (m Modul der Funktion) $0 < m < 1$.
Zum Vermeiden der bedingten Lösung [13] wird die Lösung von (1) in der Form „laufender" Welle

$$u(t,x) = f(\theta) \tag{12}$$

gesucht. Die Phase θ ist $\theta = k(x + \gamma t)$ mit $k > 0, \gamma \neq 0$.
Die Funktion $f(\theta) \in C^4(\Omega)$ ist eine unbekannte glatte reelle Funktion. Nach Einsetzen von (12) in (1) und nach Integrieren nach θ wird folgende nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung erhalten:

$$\gamma f + \frac{\alpha_0 f^2}{2} + \alpha_1 k f' + \alpha_2 k^2 f'' + \alpha_3 k^3 f''' + \alpha_4 k f f' = G \tag{13}$$

G ist die kumulative Integrationskonstante. Im Sinne der Methode der Abbildung und der singulären Verformungen wird die Lösung von (13) durch das Verhältnis

$$f(\theta) = S\Psi^2(\theta) + T \tag{14}$$

dargestellt. S und T sind unbekannte Parameter mit $S \neq 0$ zum Vermeiden der trivialen Lösung. $\Psi(\theta)$ ist eine unbekannte reelle Funktion, die der Riccati- Gleichung

$$\Psi' = \sqrt{-m^2\Psi^4 + (2m^2-1)\Psi^2 + 1 - m^2} \tag{15}$$

mit $m \in \mathbb{R}$ genügt. Aus der Theorie der elliptischen Funktionen [6], [7] ist es bekannt, dass für $0 \leq m \leq 1$ die Lösung der Gleichung (15) die zweite elliptische Funktion von Jacobi $\Psi(\theta) = cn(\theta, m)$ ist. Nach Einsetzen von (14) und (15) in (13) ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{gathered}\alpha_0 S^2 - 12S\alpha_2 m^2 k^2 = 0\\ \gamma S + \alpha_0 ST + 6S\alpha_2 k^2(2m^2-1) = 0\\ \gamma T + \frac{1}{2}\alpha_0 T^2 + 2S(1-m^2)\alpha_2 k^2 = G\\ S^2\alpha_4 k - 12S\alpha_3 m^2 k^3 = 0\\ 2S\alpha_1 k + 12S\alpha_3 k^3(2m^2-1) + 2ST\alpha_4 k = 0\end{gathered} \tag{16}$$

Das System hat eine Lösung nur wenn

$$\alpha_0\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4 \tag{17}$$

Es folgt: wenn eine knoidale Lösung existiert, ist sie immer bedingt. Diese Lösung ist:

$$S = 12k^2m^2\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$$

$$T = -\frac{\alpha_1 + 6\alpha_3 k^2(2m^2-1)}{\alpha_4}$$

$$G = -\frac{\alpha_0\alpha_1^2}{\alpha_4^2} + 6\frac{\alpha_3 k^2\left(4\alpha_2\alpha_4(1-m^2) - \alpha_3(2m^2-1)\right)}{\alpha_4^2}$$

$$\gamma = \frac{\alpha_0\alpha_1}{\alpha_4}$$

mit $0 < m \leq 1, k > 0$. Die erhaltene lokalisierte bedingte knoidale Lösung hat die Form:

$$u(t,x) = 12m^2k^2\frac{\alpha_3}{\alpha_4}cn^2(\theta; m) - \frac{\alpha_1 + 6\alpha_3 k^2(2m^2-1)}{\alpha_4} \tag{18}$$

Für $m = 1$ gilt $cn(\theta, 1) = sech\theta$. In diesem Sonderfall ist die Lösung:

$$u(t,x) = 12k^2\frac{\alpha_3}{\alpha_4}sech^2(\theta) - \frac{\alpha_1 + 6\alpha_3 k^2}{\alpha_4} \tag{19}$$

eine von einem Parameter abhängige Schar von solitären Wellen.
Die bedingten knoidalen und solitären Lösungsscharen der Gleichung des Konvektiosfluids sind nicht überraschend, sondern- erwartet. Bei der Auswahl in (12)

$$\gamma = \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_4}$$

gilt das Verhältnis

$$u_t + \alpha_0 u u_x + \alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 u_{xxx} + \alpha_3 u_{xxxx} + \alpha_4(uu_x)_x = = k\alpha_2\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_4} + k\frac{d}{d\xi}\right)\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}f''' + \frac{\alpha_0\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2}ff' + f'\right)$$

Die Bedeutung ist: Jede lokalisierte Lösung der reduzierten Korteweg-de Vries-Gleichung

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_2}f''' + \frac{\alpha_0\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2}ff' + f' = 0$$

wird mit Hilfe von (12) auf eine exakte Lösung der Gleichung (1) abgebildet. Zum Beispiel: Diese Gleichung hat eine Ein-Soliton-Lösung der Form

$f(\theta) = k^2 sech^2\left(\frac{k}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_4}}\left(x + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_4}t\right)\right)$, die auch eine Lösung der Gleichung des Konvektionsfluids (1) unter der Bedingung (17) ist.

IV. Abschließende Bemerkungen

Es ist logisch, die Anwesenheit der in [4] erhaltenen einzelnen solitären Wellen in der Zweiparameterschar der solitären Stoßwellen (9) zu erwarten. Nach dem Ansatz $c_0 = -1, c_1 = 0, c_2 = 1, k = \pm\frac{\alpha_2\alpha_4 - \alpha_0\alpha_3}{10\alpha_3\alpha_4}$ stimmen beide Scharen überein. Dieser Umstand bestimmt die Notwendigkeit, die verallgemeinerte Version der Methode der Abbildung und der singulären Verformungen zu verwenden. Einige Autoren wie Kudryashov[14], Ryabov-Sinelshchikov-Kochanov [15], Parkes-Duffy-Abbott [13]schlagen vor, an der Stelle der Riccati-Gleichung $\varphi' = c_0\varphi^2 + c_1\varphi + c_2$ die Gleichung $\varphi' = -\varphi^2 + 1$ $(c_0 = -1, c_1 = 0, c_2 = 1)$ zu nehmen. Für manche nichtlineare Evolutionsgleichungen ist die letzte Gleichung nicht passend. Sie überträgt die Abhängigkeiten zwischen den apriorischen Parametern auf Abhängigkeiten zwischen den aposteriorischen Parametern. Dies macht die lokalisierten Lösungen bedingt. Sie haben beschränkte praktische Anwendung. Die verallgemeinerte Version der Methode der Abbildung und der singulären Verformungen erlaubt, sowie solitäre als auch rationale Wellen in der Gleichung des Konvektionsfluids zu erhalten. Diese Wellen sind mit der direkten Methode nicht erkennbar. Obwohl die verallgemeinerte Version der Methode der Abbildung und der singulären Verformungen eine höhere Empfindlichkeit aufweist, reicht es nicht aus, im allgemeinen Fall die knoidalen Wellen zu erfassen. Im allgemeinen Fall wurde eine analytische knoidale Lösung von Kamenov [16] erhalten. Dafür wurde die räumliche Version der bilinearen Transformationsmethode angewandt.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H.Aspe, M. C. Depassier, „Evolution equation of surface waves in a convectlng fluid“, *Phys. Review A*, Vol. 41, № 6, pp. 3125-3128, 1990

[2] Y.Kuramoto, T. Tsuzuki, „Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium“, *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 55, Issue 2, pp.356–369, February 1976

[3] C.S.Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, „Method for solving the Korteweg- de Vries equation“, *Phys. Rev. Lett.* Vol.19, №19, pp. 1095-1097, 1967

[4] Sen-yue Lou, Guo-xiang Huang, Hang-yu Ruan, „Exact solitary waves in a convecting fluid“, *J. Phys. A Math. Gen.* Vol. 24, №11, pp. L587-L590, 1991

[5] A.V.Porubov, „Exact travelling wave solutions of nonlinear evolution equation of surface waves in a convecting fluid“, *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. 26, №17, pp. L797-L800, 1993

[6] N.I.Ahieser, *Elemente der Theorie der elliptischen Funktionen*, (auf Russisch), Nauka, Moskau, 1970

[7] D.F.Lawden D., *Elliptic Functions and Applications*, Springer-Verlag New York, 1989

[8] J.Weiss, M. Tabor, G. Carnevale, „The Painlevé property for partial differential equations”, *J. Math. Phys.*, Vol. 24,issue 3, pp.522-526, 1982

[9] O.Y.Kamenov, „Periodic solutions of the non-integrable convective fluid equation, *J.Math. Phys.,Vol.* 53,issue 6, 063705, 2012

[10] R.Hirota, „Exact N-soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow-water and in nonlinear lattices“, *J. Math. Phys.*, Vol. 14, pp. 810-814, 1973

[11] Y.Matsuno, *Bilinear Transformation Method*, Academic Press, New York 1984

[12] M.Toda, *Theory of Nonlinear Lattices*, Springer, Berlin, 1981

[13] E.J.Parkes, Duffy, B. R. & Abbott, P. C., „The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations“, *Physics Letters A*, 295, pp. 280-286, 2002

[14] N.A.Kudryashov, „Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations“, *Chaos, Solitons & Fractals, Elsevier*, Vol.24, №5, pp. 1217-1231, 2005

[15] P.N.Ryabov, D. I. Sinelshchikov, M. B. Kochanov, „Application of the Kudryashov method for finding exact solutions of the high order nonlinear evolution equations“, *Appl. Math. and Comp., Elsevier,* Vol.218, №7, pp. 3965-3972, 2011

[16] O.Y.Kamenov, Doktorarbeit (DSc) „Räumliche Abweichungen in den periodischen Lösungen der nichtintegrierbaren Evolutionsgleichungen”,(auf Bulgarisch) TU-Sofia, Sofia, 2014